Bruchrechnen
für Fortgeschrittene

---

1. Teil

Kürzen, Erweitern
Addition, Subtraktion

Zur Wiederholung oder zum Auffrischen

auf etwas höherem Niveau

Die Aufgaben aus diesem Text sind zudem in 10222 ausgelagert.

Datei Nr. 10221

Stand 21. Januar 2014

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Ich habe im März/April 2012 meine Texte zur Bruchrechnung vollkommen neu geschrieben. Der alte Text war eher für Eltern und Lehrer gedacht, die sich darin Anregungen holen konnten.

Jetzt habe ich zwei neue Bruchrechnen-Versionen erstellt. Die erste Version ist für die Schüler geschrieben. Sie geht auf ganz niedriges Niveau herunter und bringt ausführliche Arbeitsblätter, die man ausgedruckt auch im Unterricht einsetzen kann, oder zu Hause zum Üben. Dazu enthalten sie auch Lernkärtchen. Diese entstehen, indem man zwei zusammengehörende Blätter auf Vorder- und Rückseite eines Papiers druckt und dann die vorgesehenen 18 Rechtecke ausschneidet. Auf der Vorderseite steht dann eine relative einfache Kopfrechenaufgabe, auf der Rückseite die Lösung. Damit kann man nun selbst üben, oder man spielt das zu Zweit und fragt sich gegenseitig ab.

Die in diesem Text vorliegende Version für Fortgeschrittene ist aus dem alten Manuskript entstanden. Dabei geht man schneller voran und der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben wird zunehmend höher.

Zum Wiederholen besser geeignet als der Einführungstext 102051 und 10205

Inhalt

1	Brüche erweitern und kürzen	3
1.1	Der Unterschied zwischen gleich und identisch	3
1.2	Kürzen von Brüchen	4
1.3	Erweitern von Brüchen	8
2	Unechte Brüche und gemischte Zahlen	9
3	Addition von leicht bis schwer	12
4	Subtraktion von leicht bis schwer	14
5	Addition von gemischten Zahlen	16
6	Subtraktion von gemischten Zahlen	17
7	Rechnen mit mehr als zwei Brüchen	19
8	Zusammenstellung aller Aufgaben	24
9	Lösung aller Aufgaben	28

Demo-Text für www.mathe-cd.de

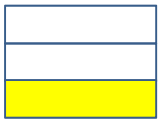
1 Brüche erweitern und kürzen.

1.1 Der Unterschied zwischen gleich und identisch – der Wert eines Bruches

Die rechte Abbildung zeigt, dass 1 „Ganzes“ (was auch immer das sein mag, etwa eine Tafel Schokolade) in 12 Teile zerlegt worden ist, und dass davon 4 Teile gelb gefärbt sind. Wir haben also eine Menge ausgewählt, die man so beschreiben kann:

Es sind 4 von 12 Teilen. Das kann man kurz so aufschreiben: $\frac{4}{12}$ und liest es „Vier Zwölftel“.

Dies nennt man einen **Bruch**. Die untere Zahl (12) heißt der **Nenner**. Er nennt, in wie viele Teile das Ganze zerlegt worden ist, die obere Zahl heißt **Zähler**, denn sie zählt die ausgewählten Teile. Ein Bruch beschreibt somit eine bestimmte „Menge“, die man ausgewählt hat, und weist ihr einen **Wert** zu, der ist hier vier Zwölftel des Ganzen. (Man lernt später, diesen Wert durch eine Division in eine Dezimalzahl umzurechnen.)



Die zweite Abbildung zeigt dieselbe gelbe Menge nur in anderer Aufteilung. Dazu wurde das „Ganze“ in nur 3 Teile zerlegt, und einer davon wurde gelb gefärbt.

Wir beobachten, dass $\frac{4}{12}$ **gleich viel ist** wie $\frac{1}{3}$, was man so aufschreibt: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

An dieser Stelle muss man und über die **Bedeutung dieses Gleichheitszeichens** nachdenken:

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ **heißt nicht:** $\frac{4}{12}$ und $\frac{1}{3}$ sind die gleichen Brüche,

denn sie sind ja nicht wirklich gleich (identisch). Ihre Zähler und ihre Nenner sind verschieden: Einmal nimmt man 4 Teile von 12, und im anderen Fall 1 von 3 Teilen. Das sind nicht dieselben Sachverhalte.

Zwei Brüche sind nur dann **identisch**, wenn sie in Zähler und Nenner übereinstimmen.
Dafür sollte man dieses Zeichen verwenden: $\equiv$

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \quad \text{wenn } a = c \text{ und } b = d \text{ ist-}$$

Es geht aber um den Begriff „gleich“. Die Mathematiker haben dies festgelegt:

Zwei Brüche heißen **gleich,** wenn sie den **gleichen Wert haben (die gleiche Menge darstellen)**

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ **heißt also** $\frac{4}{12}$ und $\frac{1}{3}$ **haben den gleichen Wert**, stellen die gleiche Menge dar.

Verwirrend? Es gilt ganz klar $\frac{4}{12} \not\equiv \frac{1}{3}$, denn diese Brüche sind nicht gleich im Sinne von identisch,

aber sie haben den gleichen Wert, wozu man auch sagt, sie sind gleich im Sinne von gleich groß, und man meint damit, dass sie den gleichen Wert haben, die gleiche „Menge“ darstellen. Aber es sind ganz klar verschiedene Brüche.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

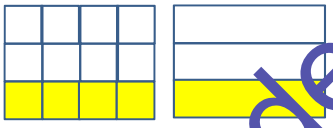
1.2 Kürzen von Brüchen

Hier geht es darum, wie man den Bruch $\frac{4}{12}$ umrechnen kann in den gleich großen Bruch $\frac{1}{3}$.

Dazu einige Beispiele, anschaulich dargestellt:

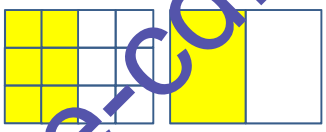
$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\boxed{4}$ Teile von 12 werden zu einem größeren Teil zusammengefasst.
Das ergibt im Zähler 1 **neues** Teil und im Nenner 3 **neue** Teile.
Dazu hat man Zähler und Nenner durch $\boxed{4}$ geteilt.
Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch $\boxed{4}$ gekürzt.**



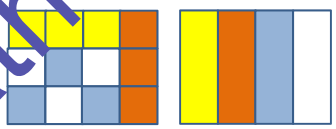
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\boxed{6}$ Teile von 12 werden zu einem größeren Teil zusammengefasst.
Das ergibt im Zähler 1 **neues** Teil und im Nenner 2 **neue** Teile.
Dazu hat man Zähler und Nenner durch $\boxed{6}$ geteilt.
Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch $\boxed{6}$ gekürzt.**



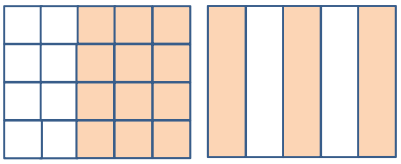
$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Je $\boxed{3}$ Teile wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.
Das ergibt im Zähler 3 **neue** Teile und im Nenner 4 **neue** Teile.
Dazu hat man Zähler und Nenner durch $\boxed{3}$ geteilt.
Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch $\boxed{3}$ gekürzt.**



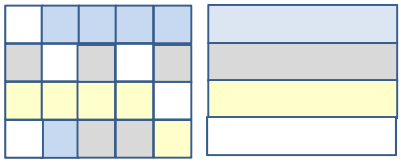
$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\boxed{4}$ Teile wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.
Das ergibt im Zähler 3 **neue** Teile und im Nenner 5 **neue** Teile.
Dazu hat man Zähler und Nenner durch $\boxed{4}$ geteilt.
Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch $\boxed{4}$ gekürzt.**



$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$\boxed{5}$ Teile wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.
Das ergibt im Zähler 3 **neue** Teile und im Nenner 4 **neue** Teile.
Dazu hat man Zähler und Nenner durch $\boxed{5}$ geteilt.
Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch $\boxed{5}$ gekürzt.**



Dividiert man Zähler und Nenner eines Bruches durch einen gemeinsamen Teiler, dann nennt man das **kürzen** des Bruches.

Der gekürzte Bruch hat **denselben Wert** wie der ungekürzte Bruch.
Beide Brüche sind also „gleich“ im Sinne von gleich groß oder gleich viel.

$\frac{8}{16} = \frac{2}{4}$

Beginnen wir unten, also im Nenner. Zu Beginn haben wir 16 Teile. Daraus machen wir 4 neue Teile. Also haben wir 4 kleine zu 1 großen Teil zusammengefasst, so dass aus 16 kleinen 4 große Teile werden. Wir dividieren also durch 4. Das muss man dann auch im Zähler tun, und so entstehen dann 8 : 4 = 2 große Teile. **Wir haben durch 4 gekürzt.**

$\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$

Hier geht es um denselben Bruch wie eben. Wir „**kürzen durch 2**“, also muss man Zähler und Nenner durch 2 teilen. Also sind 8 von 16 Teilen gleich viel wie 4 von 8 (dann größeren) Teilen.

$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

8 und 16 kann man beide durch 8 teilen. Dann hat man den Bruch **durch 8 gekürzt**.
Man sieht 8 Teile von 16 ist dasselbe wie die Hälfte (ein Halbes).

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenbeispiele zum Kürzen:

a) Kürze $\frac{21}{24}$ durch 3: $\frac{21:3}{24:3}=\frac{7}{8}$

Die roten Dreier zeigen nur, wie ich gekürzt habe. Man schreibt sie nicht an.

b) Kürze $\frac{20}{36}$ durch 4: $\frac{20:4}{36:4}=\frac{5}{9}$ So aufschreiben: $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

c) Kürze $\frac{11}{18}$ durch 2: Das geht nicht, weil man 11 nicht durch 2 teilen kann.

Zusammenfassung:

1. Man kann Zähler und Nenner eines Bruches verkleinern, indem man den Bruch **kürzt**. Dazu dividiert man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dieser Zahlen.
2. Wenn man durch den **größten gemeinsamen Teiler** (ggT) von Zähler und Nenner kürzt, erhält man das am stärksten gekürzte Ergebnis.
   Wenn man diesen nicht erkennt, kann man fortgesetzt kürzen.

Fortgesetztes Kürzen bei großen Zahlen in Zähler und Nenner

Beispiele:

a) $\frac{72:2}{96:2}=\frac{36:4}{48:4}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$

$\frac{72:12}{96:12}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$ $\frac{72:24}{96:24}=\frac{3}{4}$

Wer erkennt, dass $6\cdot 12=72$ ist und $8\cdot 12=96$, kürzt zuerst durch 12. Wer gleich den ggT 24 von 72 und 96 erkennt, kommt schneller ans Ziel.

b) $\frac{160:4}{96:4}=\frac{40:4}{24:4}=\frac{10:2}{6:2}=\frac{5}{3}$

$\frac{160:16}{96:16}=\frac{10:2}{6:2}=\frac{5}{3}$

Hier wurde erkannt, dass man 160 und 96 durch 4 teilen kann. Es wurde der Reihe nach zweimal durch 4 und dann durch 2 gekürzt.

Weil er weiß, dass $5\cdot 16=80$ ist, also $6\cdot 16=96$ ist, und um im Zähler $160=16\cdot 10$ entdeckt, kürzt durch 16.

Hast du bemerkt, dass hier der Zähler größer als der Nenner ist? Dazu kommen wir bald.

c) $\frac{192:2}{216:2}=\frac{96:2}{108:2}=\frac{48:2}{54:2}=\frac{24:3}{27:3}=\frac{8}{9}$

Hier habe ich es so gemacht, wie viele Schüler:
Bei so großen Zahlen ist es schwierig, große gemeinsame Teiler zu erkenne, Dann macht man eben viele kleine Schritte. Gerade Zahlen kann man immer durch 2 kürzen …

d) $\frac{540:2}{378:2}=\frac{270:9}{189:9}=\frac{30:3}{21:3}=\frac{10}{7}$

Erklärung: Zunächst einmal sind Zähler und Nenner gerade, also kann man durch 2 kürzen.
Dann berechne ich die Quersummen. Im Zähler ist sie 9 im Nenner 18. Beide sind durch 9 teilbar also kann man den Bruch durch 9 kürzen, und dann noch durch 3.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Kürzen durch den ggT

Das Kürzen durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner ist am effektivsten, weil man dann nach nur einem Kürzungsvorgang sofort den optimalen Bruch hat. Das Problem liegt jedoch darin, den ggT zu berechnen. Bei kleineren Zahlen ist dies relativ einfach, weil man dann den ggT oft durch Probieren schnell findet.

Beispiele:

$\text{ggT}(12,8)=4$, denn $12:4=3$ und $8:4=2$. Einen größeren gemeinsamen Teiler gibt es nicht.

$\text{ggT}(20,45)=5$, denn $20:5=4$ und $45:5=9$.

$\text{ggT}(13,39)=13$, denn 13 ist ja selbst ein Teiler von 39: $39:13=3$

Hier ein Beispiel für eine Fehlentscheidung:

$\text{ggT}(24,32)=4$ ist falsch, das erkennt man, wenn man dividiert:

$24:4=6$ und $32:4=8$. Beide Ergebnisse, also 6 und 8 kann man noch durch 2 teilen, also ist 4 nicht der größte gemeinsame Teiler sondern 8.

Wenn man sich also nicht sicher ist, ob beispielsweise 12 der ggT von 72 und 108 ist, dann dividiert man: $72:12=6$ und $108:12=9$ (Man sieht, dass es günstig ist, solche Rechnung im Kopf machen zu können!). Weil nun aber 6 und 9 noch den gemeinsamen Teiler 3 haben, ist nicht 12 der ggT von 72 und 108 sondern es gilt: $\text{ggT}(72,108)=12\cdot 3=36$.

Eine früher wichtige Methode ist die Bestimmung des ggT durch die **Primfaktorzerlegung**. Man kann nämlich jede Zahl eindeutig in Primzahlen zerlegen und dann aus diesen Primzahlen alle Teiler der Zahl bilden. (**Primzahlen** sind alle Zahlen, die genau 2 Teiler haben, nämlich 1 und sich selbst. Damit ist 1 keine Primzahl. Die Primzahlen beginnen mit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 …)
Das Berechnungsschema des ggT mittels Primfaktorzerlegung wird in 10102 ausführlich erklärt.

Hier zwei Musterbeispiele dazu:

a) Kürze $\frac{126}{216}$.

$126=9\cdot 14=3\cdot 3\cdot 2\cdot \boxed{7}\cdot$	$F=7$
$216=9\cdot 24=3\cdot 3\cdot 2\cdot \boxed{2\cdot 2\cdot 3}$	$F=12$
ggT $=3\cdot 3\cdot 2=18$	

Zuerst habe ich 126 in ein Produkt zerlegt: $126=9\cdot 14$. Dann ersetzt man $9=3\cdot 3$ und $14=2\cdot 7$. Ähnliches geschieht bei 216. Hier ist die Quersumme auch 9, daher ist 9 ein Teiler und ich rechne $216:9=24$ also ist $216=9\cdot 24$. Und dann wird 9 zerlegt und $24=8\cdot 3=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$
Man schreibt dann <u>nur gleiche Primfaktoren untereinander</u>. Der ggT besteht aus allen gemeinsamen Primfaktoren, ist also $3\cdot 3\cdot 2=18$. Beim Kürzen fallen genau diese Faktoren heraus und die eingerahmten bleiben noch stehen. Im Zähler ist dies der Faktor 7, im Nenner der Faktor 12.

Damit geht die Rechnung so: Ich kürze durch den ggT, also durch 18: $\frac{126}{216}=\frac{126:18}{216:18}=\frac{7}{12}$

Es gibt noch einen TRICK: Zähler und Nenner haben die Quersumme 9, sind also durch 9 teilbar. Da sie außerdem gerade Zahlen sind, sind sie durch 2, also insgesamt durch $2\cdot 9=18$ teilbar. Also kann man durch 2 und dann durch 9, oder gleich durch 18 teilen.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

b) $\frac{126}{168} = \frac{126:42}{168:42} = \frac{3}{4}$

$\text{ggT}(126,168) = 42$

$126 = 9 \cdot 14 = \boxed{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot$		$F = 3$
$168 = 4 \cdot 42 = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \boxed{2 \cdot 2}$		$F = 4$
ggT	$= 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$	

Ich habe also durch $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ gekürzt. Und stehen blieben 3 und im Nenner 4.

Aufgabe 1: Schreibe auf, durch welche Zahl gekürzt worden ist:

a) $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ b) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{6}{18} = \frac{2}{6}$ e) $\frac{64}{72} = \frac{8}{9}$

Aufgabe 2:

a) Kürze $\frac{18}{36}$ durch 2: b) Kürze $\frac{18}{36}$ durch 6: c) Kürze $\frac{18}{36}$ durch 9:

d) Kürze $\frac{18}{36}$ durch 18: e) Kürze $\frac{3}{9}$ durch 3: f) Kürze $\frac{8}{40}$ durch 4:

g) Kürze $\frac{21}{28}$ durch 7: h) Kürze $\frac{16}{24}$ durch 8: i) Kürze $\frac{108}{72}$ durch 12

Aufgabe 3: a) Durch welche Zahlen kann man $\frac{6}{24}$ kürzen? Zeige alle Möglichkeiten.

b) Durch welche Zahlen kann man $\frac{10}{40}$ kürzen? Zeige alle Möglichkeiten.

c) Durch welche Zahlen kann man $\frac{14}{28}$ kürzen? Zeige alle Möglichkeiten.

Aufgabe 4: Kürze mit der größten Zahl, die möglich ist. Du kannst auch mehrfach nacheinander kürzen, wenn dir das einfacher erscheint.

a) $\frac{4}{12}$ b) $\frac{12}{60}$ c) $\frac{15}{20}$ d) $\frac{30}{45}$ e) $\frac{16}{24}$

f) $\frac{40}{60} =$ g) $\frac{18}{30}$ h) $\frac{30}{42}$ i) $\frac{24}{32}$ j) $\frac{26}{39}$

k) $\frac{32}{80}$ l) $\frac{36}{54}$ m) $\frac{81}{45}$ n) $\frac{42}{56}$ o) $\frac{63}{108}$

Aufgabe 5:

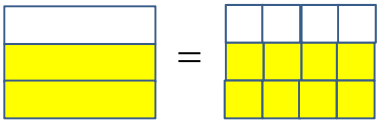
a) $\frac{126}{216}$ b) $\frac{126}{168}$ c) $\frac{140}{196}$ d) $\frac{162}{153}$ e) $\frac{180}{84}$

f) $\frac{108}{180}$ g) $\frac{336}{192}$ h) $\frac{343}{245}$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.3 Erweitern von Brüchen

Finde heraus, wie viel $\frac{2}{3}$ ist, wenn man statt 3 12 Teile macht.



Das ist ganz einfach. Man muss erkennen, dass aus jedem großen Teil 4 kleine neue Teile werden. Und aus den 2 gelben großen Teilen werden dann 8 kleine Teile. Also werden Zähler und Nenner mit 4 multipliziert.

Man sagt: Der Bruch $\frac{2}{3}$ wird mit 4 erweitert. Das bedeutet: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

Erweitern ist die Umkehrung vom Kürzen. Man kann einen Bruch mit jeder gewünschten Zahl erweitern. Dazu werden Zähler und Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

Beispiele:

a) Erweitere $\frac{4}{7}$ mit 3: $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}$

b) Erweitere $\frac{5}{13}$ mit 6: $\frac{5}{13} = \frac{5 \cdot 6}{13 \cdot 6} == \frac{30}{78}$

c) $\frac{5}{9} = \frac{\square}{45}$ Man erkennt, dass der Nenner mit 5 multipliziert worden ist. Dasselbe muss man beim Erweitern im Zähler tun: $5 \cdot 5 = 25$. Ergebnis: $\frac{5}{9} = \frac{25}{45}$

d) $\frac{12}{25} = \frac{48}{\square}$ Man erkennt, dass der Zähler mit 4 multipliziert worden ist. Dasselbe muss man in Nenner tun: $25 \cdot 4 = 100$. Ergebnis: $\frac{12}{25} = \frac{48}{100}$.

f) $\frac{4}{5} = \frac{\square}{11}$ Diese Aufgabe kann man nicht lösen. Denn wie soll man durch Multiplikation aus 5 Teilen 11 machen?

5 ist kein Teiler von 11, also kann man hier nicht erweitern.

Aufgabe 6: Erweitere diese Brüche:

a) $\frac{3}{7} = \frac{\square}{14}$, b) $\frac{4}{9} = \frac{\square}{27}$ c) $\frac{5}{6} = \frac{\square}{24}$, d) $\frac{3}{11} = \frac{\square}{77}$ e) $\frac{7}{12} = \frac{\square}{60}$

f) $\frac{2}{9} = \frac{10}{\square}$ g) $\frac{3}{16} = \frac{12}{\square}$ h) $\frac{1}{8} = \frac{7}{\square}$ i) $\frac{15}{19} = \frac{150}{\square}$ j) $\frac{5}{21} = \frac{25}{\square}$

k) $\frac{1}{8} = \frac{\square}{40}$ l) $\frac{13}{25} = \frac{\square}{100}$ m) $\frac{4}{13} = \frac{12}{\square}$ n) $\frac{7}{20} = \frac{35}{\square}$ o) $\frac{21}{100} = \frac{31}{\square}$

Aufgabe 7: Erweitere diese Brüche:

a) $\frac{5}{13}$ mit 6 b) $\frac{4}{12}$ mit 30 c) $\frac{16}{19}$ mit 2 d) $\frac{4}{29}$ mit 3

e) $\frac{14}{37}$ mit 10 f) $\frac{2}{17}$ mit 5 g) $\frac{24}{13}$ mit 4 h) $\frac{3}{5}$ mit 15

i) $\frac{8}{11}$ mit 11 j) $\frac{1}{25}$ mit 30 k) $\frac{4}{21}$ mit 8 l) $\frac{111}{125}$ mit 8

Demo-Text für www.mathe-cd.de